Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas I (MA1111)
Preparador: Ricardo J. Fernández Terán (RicharOrange@hotmail.com)

SOLUCIONES EXPLICADAS DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL (20 %)

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2012 Tipo C (Horario 7-8)

1. Resolver la siguiente inecuación:

$$-1 \leq \left|\frac{1-x}{x-3}\right| < 2$$

Solución:

Se trata de un sistema con una inecuación racional de valor absoluto, por lo que hay que comparar con cero, pero ¡¡Un momento!! $|\clubsuit| \geq 0 > -1 \quad \forall \clubsuit \in \mathbb{R}$ (por definición) así que la primera inecuación del sistema tiene por solución $\mathbb{R} - \{3\}$ (para que no se anule el denominador hay que excluir el punto $x = 3$).

Resolvemos ahora la segunda inecuación del sistema, aplicando definición de valor absoluto:

$$\left|\frac{1-x}{x-3}\right| < 2 \implies -2 < \frac{1-x}{x-3} < 2 \implies \begin{cases} \dfrac{1-x}{x-3} < 2 \implies \dfrac{1-x-2(x-3)}{x-3} < 0 \implies \dfrac{7-3x}{x-3} < 0 \\ -2 < \dfrac{1-x}{x-3} \implies 0 < \dfrac{1-x+2(x-3)}{x-3} \implies \dfrac{x-5}{x-3} > 0 \end{cases}$$

Hacemos el estudio de signos, sabiendo que los puntos críticos son: $PC_1 = \{7/3\,;\,3\}$ $\quad PC_2 = \{3;5\}$

	$(-\infty, 7/3)$	$(7/3, 3)$	$(3, +\infty)$
$7-3x$	$+$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$\frac{7-3x}{x-3}$	$-$	$+$	$-$
$\text{Sol}_1 \equiv (-\infty, 7/3) \cup (3, +\infty)$			

	$(-\infty, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-5}{x-3}$	$+$	$-$	$+$
$\text{Sol}_2 \equiv (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$			

Sabemos entonces que: $\quad \mathbf{Sol_{SIS} = Sol_1 \cap Sol_2} = \left(-\infty, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right) \cup (\mathbf{5}, +\infty)$

2. Hallar la ecuación canónica de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta de ecuación $x + y = 2$ sabiendo que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, 4)$ e indicar expresamente su centro y su radio.

Solución:

La recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ es una cuerda, la llamaremos $\boldsymbol{L}$. Sabemos la ecuación de la recta que contiene al centro de la circunferencia, y sabemos que la perpendicular de una cuerda que pasa por su punto medio (la llamaremos $\boldsymbol{P}$) también pasa por el centro de la circunferencia, con lo que el centro será el punto de intersección de ambas rectas ($\boldsymbol{P}$ y la que contiene al centro).

En primer lugar hallamos las ecuaciones de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{P}$:

$$P_m = \left(\frac{2+3}{2};\frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \qquad m_L = \frac{-1-4}{2-3} = 5$$

$$L \equiv y = 5x + b \qquad b = (4) - 5(3) = -11 \implies \boldsymbol{L \equiv y = 5x + 11}$$

$$m_L \cdot m_P = -1 \implies m_P = -\frac{1}{5} \qquad P \equiv y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right) \implies \boldsymbol{P \equiv y = 2 - \frac{x}{5}}$$

Luego hallamos el punto de intersección entre $\boldsymbol{P}$ y $x + y = 2$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{x}{5} \\ x + y = 2 \end{cases} \implies \text{intersección en el punto } (0,2) = \text{Centro de la circunferencia } \boldsymbol{C(0,2)}$$

El radio de la circunferencia será entonces la distancia entre el centro y cualquiera de los dos puntos que pertenecen a ella, por ejemplo, tomando $B(3,4)$:

$$d_{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13} \implies \text{radio de la circunferencia} \equiv \boldsymbol{r = \sqrt{13}}$$

Así, la ecuación canónica de la circunferencia pedida será:	$\boldsymbol{x^2 + (y-2)^2 = 13}$

3. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 1 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

a) Bosqueje las gráficas de ambas funciones.
b) Determine $\mathrm{Dom}(g)$
c) Encuentre una expresión para $f \circ g$

<u>Solución:</u> *(Las gráficas se encuentran en la siguiente página)*

$\mathrm{Dom}(g) \equiv \{x \in \mathbb{R}:\ 9 - x^2 \ge 0\} = \{x \in \mathbb{R}:\ -3 \le x < 3\} = [-3,3]$

La composición se realiza sustituyendo literalmente:

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} [g(x)]^2 & \text{si } g(x) \le 1 \\ 1 - 2g(x) & \text{si } g(x) > 1 \end{cases}$$

Ahora calculamos los intervalos de definición en términos del dominio de la función interna:

$$g(x) \le 1 \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-x^2} \le 1 \\ x \in \mathrm{Dom}(g) \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{9-x^2} \le 1 \\ x \in [-3,3] \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 \ge 8 \implies |x| \ge \sqrt{8} \implies \left(-\infty,-\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8},+\infty\right) \\ x \in [-3,3] \end{cases}$$

$$g(x) \le 1 \iff x \in \left[-3,-\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8},3\right]$$

$$g(x) > 1 \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-x^2} > 1 \\ x \in \mathrm{Dom}(g) \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{9-x^2} > 1 \\ x \in [-3,3] \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 < 8 \implies |x| < \sqrt{8} \implies \left(-\sqrt{8},\sqrt{8}\right) \\ x \in [-3,3] \end{cases}$$

$$g(x) > 1 \iff x \in \left(-\sqrt{8},\sqrt{8}\right)$$

Así, finalmente:

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{9} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} & \textbf{si } \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{3}, -\sqrt{\mathbf{8}}] \cup [\sqrt{\mathbf{8}}, \mathbf{3}] \\ \mathbf{1} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{9} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} & \textbf{si } \boldsymbol{x} \in (-\sqrt{\mathbf{8}}, \sqrt{\mathbf{8}}) \end{cases}$$

Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$: